

Coefficients binomiaux et suites de Raney généralisés dans des anneaux

Louis AUFFRET

23 février 2024

Table des matières

1	Notations et conventions	1
2	<u>Anneaux binomiaux</u>	1
2.1	Introduction	1
2.2	Définition	1
2.3	Identités et séries formelles	2
3	Suites de Raney généralisées	3
3.1	Définitions	3
3.2	Identités	4
4	Interprétation combinatoire générique des suites de Fuss-Catalan	4
4.1	Définitions	4

Résumé

L'intérêt de cet article est :

- de définir le minimum de structure à ajouter à un anneau \mathbb{A} pour pouvoir définir convenablement les coefficients binomialux $\binom{\alpha}{n}$ avec $\alpha \in \mathbb{A}$ et $n \in \mathbb{Z}$, tels que la plupart des identités usuelles sur ceux-ci soit vérifiées
- de définir des suites de Fuss-Catalan et de Raney généralisées, avec pour paramètres des éléments quelconques de l'anneau et non plus des entiers naturels
- d'apporter une interprétation combinatoire générique des suites de Fuss-Catalan à paramètres entiers naturels.

Toutes les démonstrations données sont purement algébriques et n'ont pas recours à de l'analyse.

1 Notations et conventions

Dans toute la suite, le terme “anneau” sous-entend “unitaire”, tout sous-anneau de \mathbb{A} doit contenir $1_{\mathbb{A}}$ et tout morphisme d’anneaux $\mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$ doit envoyer $1_{\mathbb{A}_1}$ sur $1_{\mathbb{A}_2}$. Les termes inventés dans le cadre de cet article (tels que anneau binomial, cf. définition plus loin) seront soulignés. Si \mathbb{A} est un anneau commutatif, $\mathbb{A}[[X]]$ désigne l’anneau des séries formelles dans \mathbb{A} . Si $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, alors $[X^n] A$ désigne le terme devant X^n , c’est-à-dire a_n . Le terme “inverse” désigne un inverse au sens de la multiplication, on parlera donc de série “réverse” pour désigner un inverse au sens de la composition. Pour une série A , on notera $A^{[-1]}$ sa série reverse : $A \circ A^{[-1]} = A^{[-1]} \circ A = X$.

2 Anneaux binomiaux

2.1 Introduction

Les coefficients binomiaux généralisés sont définis ainsi dans \mathbb{C} :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, \binom{z}{n} := \begin{cases} \frac{z^n}{n!} & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\alpha^n := \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - i)$ la factorielle descendante (si $n = 0$, α^n est un produit vide, donc égal à 1).

On peut alors constater que la raison pour laquelle cette définition a du sens est que \mathbb{C} vérifie les deux propriétés suivantes :

- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n!$ possède un inverse dans \mathbb{C}

L’objectif de cet article est la construction et l’étude de coefficients binomiaux dans un cadre plus général, où z est un élément d’un anneau vérifiant certaines propriétés.

2.2 Définition

Définition 2.1 Soit \mathbb{A} un anneau et φ l’unique morphisme d’anneaux de \mathbb{Z} dans \mathbb{A} . Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, on note $n_{\mathbb{A}} := \varphi(n) = n \cdot 1_{\mathbb{A}}$.

Remarque 1 Soit $\mathbb{A} \neq \{0_{\mathbb{A}}\}$ un anneau non réduit à zéro. Alors s’il existe Φ un morphisme d’anneaux de \mathbb{Q} dans \mathbb{A} , celui-ci est unique (car entièrement déterminé par $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{A}$), et il est injectif (car \mathbb{Q} est un corps). De même, si \mathbb{A} possède un sous-anneau isomorphe à \mathbb{Q} , celui-ci est unique car c’est l’image de Φ . Dans toute la suite, on notera pour simplifier $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$.

Remarque 2 Soit \mathbb{A} un anneau. Comme chaque factorielle est un produit d’entiers non nuls, et chaque entier non nul est un quotient de factorielles ou son opposé, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A \neq \{0_{\mathbb{A}}\}$ et il existe un morphisme d’anneaux de \mathbb{Q} dans \mathbb{A}

2. \mathbb{A} possède un sous-anneau isomorphe à \mathbb{Q}
3. $A \neq \{0_{\mathbb{A}}\}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $n_{\mathbb{A}}$ possède un inverse dans \mathbb{A}
4. $A \neq \{0_{\mathbb{A}}\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n!)_{\mathbb{A}}$ possède un inverse dans \mathbb{A}

Toutes ces propriétés se résument donc à $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$.

Définition 2.2 (Anneau binomial) On dira qu'un anneau \mathbb{A} est un anneau binomial s'il est commutatif et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$.

Définition 2.3 (Coefficients binomiaux) Soit \mathbb{A} un anneau binomial. On définit alors les coefficient binomiaux généralisés ainsi :

$$\forall \alpha \in \mathbb{A}, \forall n \in \mathbb{Z}, \binom{\alpha}{n} := \begin{cases} \frac{\alpha^n}{n!} & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que l'on considère ici $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$, donc $\frac{1}{n!} := (n!)_{\mathbb{A}}^{-1}$ et $\alpha^n = \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - i) := \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - i_{\mathbb{A}})$

Remarque 3 Il n'est pas nécessaire que \mathbb{A} soit commutatif pour que cette définition ait du sens, mais cette propriété s'avèrera bien trop utile pour ne pas l'inclure dans la définition d'un anneau binomial.

Exemple 2.4 On considère I l'identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = 0$, on peut montrer sans difficulté que $\text{Vect}(I, J)$ est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\mathbb{Q}I = \{qI, q \in \mathbb{Q}\}$ est isomorphe à \mathbb{Q} . Donc $\text{Vect}(I, J)$ est un anneau binomial. Notons que vu que $J^2 = 0$, un anneau binomial n'est pas nécessairement intègre.

2.3 Identités et séries formelles

Définition 2.5 Soient \mathbb{A} un anneau binomial et $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{A}[[X]]$. Comme tous les entiers non nuls sont inversibles dans \mathbb{A} , on peut définir l'intégrale en 0 de A :

$$\text{Int}_0(A) := \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} X^n$$

et on vérifie immédiatement l'identité $(\text{Int}_0(A))' = A$.

Définition 2.6 Soit \mathbb{A} un anneau binomial. On peut alors poser

$$\exp := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} X^n \in \mathbb{A}[[X]]$$

$$U := \text{Int}_0((1 + X)^{-1}) \in \mathbb{A}[[X]]$$

Notons que $(1 + X)$ possède un inverse car son terme constant est inversible, que son inverse est $\sum_{n \geq 0} (-1)^n X^n$ et que $U = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n$ est la série notée informellement $\ln(1 + X)$.

Définition 2.7 (Puissances non entières de séries) Soit \mathbb{A} un anneau binomial. On pose alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{A}, (1 + X)^\alpha := \exp \circ (\alpha U)$$

et pour toute série formelle $V \in \mathbb{A}[[X]]$ de terme constant égal à 1, on pose

$$\forall \alpha \in \mathbb{A}, V^\alpha := (1 + X)^\alpha \circ (V - 1) = \exp \circ (\alpha U) \circ (V - 1)$$

Proposition 2.8 Cette notation étend (sans ambiguïté de notation) les puissances entières de $(1 + X)$ et de V , et

$$\forall \alpha \in \mathbb{A}, (1 + X)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} X^n \text{ et } V^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} (V - 1)^n$$

Théorème 2.9 (Identités des puissances non entières) Soient \mathbb{A} un anneau binomial, $V, W \in \mathbb{A}[[X]]$ de termes constants égaux à 1, $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$. On a alors :

1. $V^\alpha V^\beta = V^{\alpha+\beta}$
2. $(V^\alpha)^\beta = V^{\alpha\beta}$
3. $V^\alpha W^\alpha = (VW)^\alpha$
4. $(V^\alpha)' = \alpha V' V^{\alpha-1}$

Théorème 2.10 (Formule de réversion de Lagrange-Bürmann)

3 Suites de Raney généralisées

3.1 Définitions

Avant d'introduire les suites de Raney (2 paramètres), il est pertinent d'introduire les suites de Fuss-Catalan (1 paramètre).

Définition 3.1 (Suites de Fuss-Catalan) Soit $p \in \mathbb{N}$. La suite de Fuss-Catalan de paramètre p est la suite d'entiers naturels définie par récurrence ainsi :

$$\begin{cases} C_0^{(p)} = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1}^{(p)} = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p \\ i_1 + \dots + i_p = n}} \prod_{j=1}^p C_{i_j}^{(p)} \end{cases}$$

ou de manière équivalente, on peut définir $F_p = \sum_{n \geq 0} C_n^{(p)} X^n$ comme l'unique solution de l'équation

$$X F_p^p = F_p - 1$$

Remarque 4 L'objectif est de définir des suites de Fuss-Catalan de paramètre $p \in \mathbb{A}$ avec \mathbb{A} un anneau binomial, en utilisant l'équation $X F_p^p = F_p - 1$. On peut remarquer que F_p^p n'est pas défini si $[X^0] F_p \neq 1$. Cependant, même si l'on étendait la définition

des puissances non entières aux séries de terme constant différent de 1 tel que $\forall A \in \mathbb{A}[[X]]$, $\forall p \in \mathbb{A}$, $A^p \in \mathbb{A}[[X]]$, l'équation $XF_p^p = F_p - 1$ implique que $F_p - 1$ est de terme constant nul, donc que F_p a pour terme constant 1. Le cas où l'inconnue est a pour terme constant 1 est donc le seul cas où il est pertinent d'essayer de résoudre cette équation, et notre définition des puissances non entières est alors suffisante pour que l'équation ait du sens.

Théorème 3.2 Soient \mathbb{A} un anneau binomial, $p \in \mathbb{A}$, $\Omega = \{A \in \mathbb{A}[[X]], [X^0] A = 1\}$. Alors l'équation

$$XF_p^p = F_p - 1$$

d'inconnue F_p admet une unique solution dans Ω , et celle-ci s'exprime comme :

$$F_p = 1 + (X(1+X)^{-p})^{[-1]}$$

Définition 3.3 Soient \mathbb{A} un anneau binomial, $p \in \mathbb{A}$, $\Omega = \{A \in \mathbb{A}[[X]], [X^0] A = 1\}$. On définit alors la suite de Fuss-Catalan de paramètre p comme les coefficients de l'unique solution de l'équation $XF_p^p = F_p - 1$ dans Ω :

$$\sum_{n \geq 0} C_n^{(p)} X^n := 1 + (X(1+X)^{-p})^{[-1]}$$

Définition 3.4 Soient $p, r \in \mathbb{N}$. La suite de Raney de paramètres (r, p) (aussi appelée suite de Fuss-Catalan à deux paramètres) est la suite d'entiers naturels définie ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n^{(p,r)} := \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{N}^r \\ i_1 + \dots + i_r = n}} \prod_{j=1}^r C_{i_j}^{(p)}$$

avec $(C_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fuss-Catalan de paramètre p . Ou autrement dit, si $F_p = \sum_{n \geq 0} C_n^{(p)} X^n$, alors

$$\sum_{n \geq 0} R_n^{(p,r)} X^n := F_p^r$$

Remarque 5 Notons que si l'on prend p dans un anneau binomial \mathbb{A} quelconque, on a toujours $C_0^{(p)} = 1$ comme terme constant pour F_p . Il est donc tout à fait possible d'élever F_p à une puissance $r \in \mathbb{A}$ quelconque pour définir les suites de Raney généralisées.

Définition 3.5 Soient \mathbb{A} un anneau binomial, $p, r \in \mathbb{A}$. On définit ainsi la suite de Raney de paramètres (p, r) :

$$\sum_{n \geq 0} R_n^{(p,r)} X^n := \left(1 + (X(1+X)^{-p})^{[-1]}\right)^r$$

3.2 Identités

4 Interprétation combinatoire générique des suites de Fuss-Catalan

4.1 Définitions